Тема 17

https://github.com/v--/se2018

Марковски вериги с дискретно време. Класификация на състоянията. Ергодична теорема. Приложения.

Янис Василев

Оригинал: 25 юни 2019
Ревизия: 9c26f56 от 04 ноември 2024
За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Теорията е базирана на Божкова, *Случайни процеси*, но някои неща са заимствани от Боровков, *Теория вероятностей*. Ергодичната теорема е отчасти базирана на Halidias, „Ergodic Theorems for discrete Markov chains“.

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Дефиниция за марковска верига.
2. Уравнения на Чепмен-Колмогоров.
3. Класификация на състоянията - критерии за преходност и възвратност, ергодичност.
4. Гранични вероятности.
5. Стационарни гранични разпределения.
6. Ергодична теорема.

1.2. Основни понятия

Ще считаме, че е фиксирано някакво вероятностно пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$.

Определение 1. **Случаен процес с дискретно време** наричаме редица от случайни величини $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$.

Ще предполагаме, че всички $\xi_0, \xi_1, \dots$ са дискретни със стойности неотрицателни цели числа.

Ако $\xi_n = i$, ще казваме, че процесът е в **състояние** i в **момента** n.

Вероятността $\mathrm{P}(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i)$ наричаме **вероятност за преход** от i към j в момента n. Ако вероятностите за преход не зависят от момента, казваме, че процесът е **стационарен**.

Процесът $\{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ наричаме **марковска верига**, ако за произволно цяло число $n > 0$ и състояния $j_0, \dots, j_n$ е изпълнено

$$\mathrm{P}(\xi_n = j_n \mid \xi_{n-1} = j_{n-1}, \xi_{n-2} = j_{n-2}, \dots, \xi_0 = j_0) = \mathrm{P}(\xi_n = j_n \mid \xi_{n-1} = j_{n-1}).$$

Ако означим $\sigma(\xi_k) \coloneqq \{\xi_k^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$, горното условие може да се запише и чрез

$$\mathrm{P}(\xi_n = j_n \mid \sigma(\xi_{n-1}), \sigma(\xi_{n-2}), \dots, \sigma(\xi_0)) = \mathrm{P}(\xi_n = j_n \mid \sigma(\xi_{n-1})).$$

Забележка 2. Предполагаме, че случайните величини $\xi_0, \xi_1, \dots$ могат да приемат за стойности произволни положителни цели числа. Затова ще работим с безкрайни вектори и матрици. Поради нормираността и неотрицателността на вероятностната мярка, обаче, работата с тези вектори и матрици няма да ни създава проблеми.

С V ще означаваме линейното пространство от редици от положителни цели числа, а с $V \times V$ пространството от безкрайни матрици от положителни цели числа.

Ще разгледаме само еднородни марковски вериги, за които са зададени вектор от начални вероятности $B = (b_0, b_1, \dots) \in V$ и матрица на преходите

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in V \times V,$$

така че са изпълнени $\mathrm{P}(\xi_0 = i) = b_i$ и $\mathrm{P}(\xi_1 = j \mid \xi_0 = i) = p_{ij}$ за произволни състояния i и j.

Определение 3. Векторът $v \in V$ наричаме **стохастичен**, ако елементите му са неотрицателни и се сумират до единица. Матрицата $A \in V \times V$ наричаме **(дясно) стохастична**, ако всеки неин ред е стохастичен.

Забележка 4. Горната дефиниция се пренася без изменения върху крайномерни линейни пространства.

Твърдение 5. *Вектор-редът B от начални вероятности и матрицата на преходите P на една марковска верига са стохастични.*

Доказателство. Тъй като векторът B напълно описва разпределението на ξ_0, елементите му се сумират до единица.

За фиксирано число i дефинираме събитието $A_i \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid \xi_0(\omega) = i\}$. Тогава i-тият ред на матрицата P напълно описва условното разпределение

$$\mathrm{P}(\xi_1 = j \mid A_i) = \mathrm{P}(\xi_1 = j \mid \xi_0 = i).$$

Следователно

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = j \mid \xi_0 = i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_1 = j \mid A_i) = 1.$$

□

1.3. Уравнения на Чепмен-Колмогоров

Нека е дадена марковска верига с начални вероятности B и матрица на преходите P.

Означаваме с $p_{ij}^{(n)}$ вероятността да преминем от състояние i в състояние j за n стъпки, т.е.

$$p_{ij}^{(n)} \coloneqq \mathrm{P}(\xi_n = j \mid \xi_0 = i).$$

Лема 6. *За произволно цяло $n > 0$ е изпълнено, че n-кратната степен P^n на матрицата P има елементи $p_{ij}^{(n)}$.*

Доказателство. Ще докажем теоремата по индукция. Случаят $n = 1$ е тривиален, тъй като P по определение е матрицата от преходни вероятности за една стъпка.

Нека предположим, че теоремата е вярна за P^{n-1}. Вероятността да преминем от състояние i към състояние j за n стъпки тогава е сумата на вероятностите по всички траектории. От формулата за пълната вероятност имаме

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \mathrm{P}(\xi_n = j \mid \xi_0 = i) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = k, \xi_0 = i)\,\mathrm{P}(\xi_{n-1} = k \mid \xi_0 = i) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = k)\,\mathrm{P}(\xi_{n-1} = k \mid \xi_0 = i) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{kj} p_{ik}^{(n-1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}.
\end{aligned}$$

Но това по определение са именно елементите на матрицата $P^{n-1}P$. Следователно матрицата P^n има елементи $p_{ij}^{(n)}$. □

Забележка 7. Лемата важи и за $n = 0$, в който случай получаваме единичната матрица. Вероятностната интерпретация на този факт е, че всяко състояние с вероятност 1 достига себе си за 0 стъпки.

Теорема 8 (Уравнения на Чепмен-Колмогоров). *За произволни цели $m, n \geq 0$ е изпълнено*

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

за всеки две състояния $i, j \geq 0$.

Доказателство. От свойствата на матричното умножение имаме $P^{n+m} = P^n P^m$. Лема 6 ни казва, че това е просто матричен запис на уравненията от условието. $\square$

Следствие 9. *Безусловната вероятност $\mathrm{P}(\xi_n = i)$ за това да се намираме в състояние i в момента n е i-тата координата на вектора BP^n.*

Доказателство. От формулата за пълната вероятност имаме

$$\mathrm{P}(\xi_n = i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi_n = i \mid \xi_0 = k)\,\mathrm{P}(\xi_0 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ki}^{(n)} s_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k p_{ki}^{(n)},$$

което по определение е именно i-тата координата на вектор-реда BP^n. $\square$

1.4. Класификация на състоянията

За състояния i и j въвеждаме означенията

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &:= \mathrm{P}(\xi_n = j, \xi_{n-1} \neq j \ldots, \xi_1 \neq j \mid \xi_0 = i), \\ f_{ij} &:= \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

В частност, $f_{ij}^{(0)} = p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$. Стойността $f_{ij}^{(n)}$ е вероятността започвайки от състояние i да достигнем за пръв път състояние j за точно n стъпки, а f_{ij} е вероятността излизайки от състояние i някога да стигнем до състояние j. В теорема 15 ще видим, че $f_{ii} \in [0, 1]$.

Определение 10.

- Състоянието j се нарича **достижимо** от състоянието i, ако $p_{ij}^{(n)} > 0$ за някое $n > 0$.
- Състоянията i и j се наричат **съобщаващи се**, ако те са достижими едно от друго. Пишем $i \leftrightarrow j$.
- Една марковска верига се нарича **неразложима**, ако всеки две нейни състояния са съобщаващи се.
- Състоянието i се нарича **поглъщащо**, ако никое друго състояние не може да бъде достигнато от него.
- Състоянието i се нарича **възвратно**, ако $f_{ii} = 1$.

- Състоянието i се нарича **преходно**, ако $f_{ii} < 1$.
- Ако $f_{ii} > 0$, числото $d_i \coloneqq \gcd(\{n > 0 \mid p_{ii}^{(n)} > 0\})$ се нарича **период** на състоянието i. Състояние с период $d > 1$ се нарича **периодично** с период d, а състояние с период 1 се нарича **апериодично**.
- Ако всички състояния на една неразложима марковска верига имат период d, самата верига се нарича **периодична** с период d.

Твърдение 11. *Релацията $\leftrightarrow$ е релация на еквивалентност в множеството от състояния.*

Доказателство.

1. $i \leftrightarrow i$, тъй като всяко състояние достига себе си за 0 стъпки.
2. Ако $i \leftrightarrow j$, то по определение $j \leftrightarrow i$.
3. Ако $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$, тогава от уравненията на Чепмен-Колмогоров следва, че $i \leftrightarrow k$.

□

Това ни позволява да разбием множеството състояния на непресичащи се класове.

Следствие 12. *Една марковска верига е неразложима точно тогава, когато има единствен клас съобщаващи се състояния.*

Твърдение 13. *Периодичността е съгласувана с класовете съобщаващи се състояния, т.е. две периодични или апериодични съобщаващи се състояние имат един и същи период.*

Доказателство. Нека $i \leftrightarrow j$, т.е. за някои числа $n, m > 0$ са изпълнени $p_{ij}^{(n)} > 0$ и $p_{ji}^{(m)} > 0$.

Нека първо i е апериодично. Тогава за произволно k, за което $\pi_{ii}^{(k)} > 0$, е изпълнено $p_{ii}^{(n+k+m)} > 0$. Но ако $\gcd(\{k \mid k > 0, p_{ii}^{(k)} > 0\}) = 1$, то $\gcd(\{n + k + m \mid k > 0, p_{ii}^{(n)} > 0\}) = 1$. Следователно състоянието j също е апериодично.

Нека сега i не е апериодично. Тогава $p_{ii}^{(n+m)} > 0$ и следователно $d_i \mid (n + m)$. Аналогично получаваме $p_{jj}^{(m+n)} > 0$, следователно $d_j \mid (m + n)$.

Това е вярно за всички $n, m > 0$, за които $p_{ij}^{(n)} > 0$ и $p_{ji}^{(m)} > 0$. Да забележим, че тъй като и двете състояния не са апериодични, $p_{ii} = p_{jj} = 0$, т.е. i може да достигне себе си само преминавайки през j. Следователно числата d_i и d_j имат едни и същи кратни и значи $d_i = d_j$. □

Следствие 14. *Една неразложима марковска верига е периодична с период d ако поне едно, а оттам и всички състояния имат период d.*

Теорема 15. *Състоянието i е преходно, точно когато редът $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ е сходящ. В противен случай, състоянието е възвратно.*

Доказателство. Разглеждаме пораждащите функции

$$f(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} z^n, \qquad\qquad p(z) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} z^n.$$

за редиците

$$\{f_{ii}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}, \qquad\qquad \{p_{ii}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}.$$

По формулата за пълната вероятност за $n > 0$ имаме

$$\begin{aligned}
p_{ii}^{(n)} &= \mathrm{P}(\xi_n = i \mid \xi_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_n = i \mid \xi_k = i, \xi_{k-1} \neq i, \dots, \xi_1 \neq i, \xi_0 = i)\, \mathrm{P}(\xi_k = i, \xi_{k-1} \neq i, \dots, \xi_1 \neq i \mid \xi_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\xi_n = i \mid \xi_k = i)\, \mathrm{P}(\xi_k = i, \xi_{k-1} \neq i, \dots, \xi_1 \neq i \mid \xi_0 = i) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(n-k)} f_{ii}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Тогава за $z \in (-1, 1)$ имаме

$$\begin{aligned}
p(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} z^n = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} z^n = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{n} p_{ii}^{(n-k)} f_{ii}^{(k)} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (p_{ii}^{(n-k)} z^{n-k})(f_{ii}^{(k)} z^k) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} z^n \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ii}^{(n-k)} z^{n-k} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} z^n (1 + p(z)) = \\
&= f(z)(1 + p(z)).
\end{aligned}$$

Получихме

$$f(z) = \frac{p(z)}{1 + p(z)}.$$

Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{z \to 1} p(z)$$

е разходящ точно тогава, когато $\lim_{z \to 1} f(z) = 1$.

От друга страна, горният ред е сходящ, точно когато

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_i^{(n)} = \frac{p(1)}{1 + p(1)} < 1,$$

т.е. когато състоянието i е преходно. □

1.5. Гранични вероятности и ергодична теорема

Интересува ни граничното поведение на вероятностите за преходите.

Определение 16. Случайните величини

$$T_j^{(n)} \coloneqq \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \min\{k > T_j^{(n-1)} \mid \xi_k = j\}, & n > 0 \end{cases}$$

са **моментите на n-тото попадане в състояние** j.

Случайните величини $M_j^{(n)}$

$$\mu_j^{(n)} \coloneqq \begin{cases} 1, \xi_n = j \\ 0, \xi_n \neq j \end{cases}, \qquad M_j^{(n)} \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \mu_j^{(k)},$$

са **броят попадания в състоянието j до момента n.**

Очакваният брой стъпки, които са необходими, за да се върнем в състояние j, тръгвайки от него, означаваме с

$$\tau_i \coloneqq \mathrm{E}(T_i^{(1)} \mid \xi_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{P}(\xi_n = i, \xi_{n-1} \neq i, \dots, \xi_1 \neq i \mid \xi_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}.$$

Определение 17. Възвратното състояние i се нарича **положително възвратно**, ако очакването τ_i е крайно. В противен случай, състоянието се нарича **нулево възвратно**.

Положително възвратно апериодично състояние се нарича **ергодично**.

Ако в една неразложима марковска верига поне едно състояние, а оттам и всички състояния са положително възвратни, то самата верига се нарича **положително възвратна**. Ако поне едно състояние е ергодично, самата верига се нарича **ергодична**.

Определение 18. Нека е дадена марковска верига с матрица на преходите P. Стохастичният вектор $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ наричаме **стационарно разпределение** на веригата, ако π удовлетворява матричното уравнение

$$\pi = \pi P.$$

Ако границата $\lim_{n\to\infty} P^n$ съществува и редовете на получената матрица са равни, то произволен ред на матрицата наричаме **гранично разпределение** на веригата.

Теорема 19 (Ергодична теорема)**.** *Нека е дадена неразложима положително възвратна марковска верига. Тогава са в сила равенствата*

$$\frac{1}{\tau_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{M_j^{(n)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \quad \forall i \geq 0,$$

където сходимостта е по вероятност.

Освен това векторът $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ с координати $\pi_j = \frac{1}{\tau_j}$ е стационарно разпределение на веригата.

Доказателство. Тъй като веригата е положително възвратна, очакването $\tau_j \geq 1$ е крайно и следователно стойностите $\pi_j = \frac{1}{\tau_j} \in (0, 1]$ са добре дефинирани.

Първо ще докажем равенството

$$\frac{1}{\tau_j} = \lim_{n \to \infty} \frac{M_j^{(n)}}{n}.$$

Фиксираме произволни състояние j и момент $n > 0$. Да забележим, че за произволно $k \geq 0$ разликите $T_j^{(k+1)} - T_j^{(k)}$ са независими и еднакво разпределени с (условно) очакване

$$\mathrm{E}(T_j^{(k)} - T_j^{(k-1)} \mid \xi_0 = i) = \tau_j.$$

От усиления закон за големите числа имаме

$$\frac{T_j^{(n)}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T_j^{(k+1)} - T_j^{(k)}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \tau_j$$

почти сигурно.

Случайната величина $T_j^{(M_j^{(n)})}$ е моментът на последното попадане в състояние j преди момента n. По тази причина е изпълнено

$$T_j^{(M_j^{(n)})} \leq n \leq T_j^{(M_j^{(n)}+1)}.$$

Делим на $M_j^{(n)}$ и получаваме

$$\frac{T_j^{(M_j^{(n)})}}{M_j^{(n)}} \leq \frac{n}{M_j^{(n)}} \leq \frac{T_j^{(M_j^{(n)}+1)}}{M_j^{(n)} + 1} \frac{M_j^{(n)} + 1}{M_j^{(n)}}$$

От лемата за милиционерите получаваме, че

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{M_j^{(n)}} = \tau_j$$

по вероятност. Еквивалентно,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_j^{(n)}}{n} = \pi_j. \tag{1}$$

Сега ще докажем равенството

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M_j^{(n)}}{n} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} \quad \forall i \geq 0.$$

Фиксираме изходно състояние i. Понеже сходимостта в (1) е по вероятност, важи и сходимост по разпределение, следователно за всяка ограничена непрекъсната функция g имаме

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\, g\left(\frac{M_j^{(n)}}{n}\middle|\xi_0 = i\right) = \mathrm{E}\, g\left(\lim_{n\to\infty}\frac{M_j^{(n)}}{n}\middle|\xi_0 = i\right) = \mathrm{E}\, g(\pi_j \mid \xi_0 = i). \tag{2}$$

Последното следва от, например, Боровков, *Теория вероятностей*, следствие 2 на стр. 119.

Да забележим, че $\frac{M_j^{(n)}}{n} \le 1$ с вероятност 1. Понеже $g(x) \coloneqq \max(x, 1)$ е ограничена непрекъсната функция, (2) придобива вида

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{M_j^{(n)}}{n}\middle|\xi_0 = i\right) = \mathrm{E}(\pi_j \mid \xi_0 = i) = \pi_j.$$

От друга страна,

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{E}(M_j^{(n)} \mid \xi_0 = i)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(\mu_j^{(k)} \mid \xi_0 = i) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot p_{ij}^{(k)}.$$

В частност, получената стойност не зависи от началното състояние i.

Векторът π е стохастичен, тъй като

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^{(k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 = 1.$$

Остана само да докажем, че векторът π е стационарен. Уравненията на Чепмен-Колмогоров ни дават

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i p_{ij} &= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{mi}^{(k)}\right)p_{ij} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{\infty} p_{mi}^{(k)} p_{ij} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{mj}^{(k+1)} = \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{mj}^{(k)} = \pi_j.
\end{aligned}$$

□

Ако марковската верига е и апериодична, редицата $\{p_{ij}^{(n)}\}_n$ схожда към π_j. Доказателството на този факт е трудоемко и затова само ще го формулираме.

То се базира на факта, че ако редицата $\{p_{ij}^{(n)}\}_n$ е сходяща, тя схожда към същата стойност като съответната редица на Чезаро $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\}_n$, за която знаем, че клони към π_j. Ако веригата е периодична с период d, $p_{jj}^{(nd)} = 0 \quad \forall n > 0$, т.е. редицата има безброй нулеви членове и не може да схожда към положително число.

Следствие 20. *Ако веригата е ергодична, тогава*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}.$$

1.6. Приложения

1.6.1. Случайно блуждаене

Един прост пример за марковска верига с безброй състояния е **случайното блуждаене с вероятност** $p \in [0,1]$, наричано още **случайна разходка**. В този случай множеството от състояния е $\mathbb{Z}$, началното състояние е 0 с вероятност 1 и вероятностите за преход са

$$\mathrm{P}(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i) = \begin{cases} p, & j = i+1 \\ 1-p, & j = i-1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Очевидно едно случайно блуждаене е неразложима, възвратна и периодична марковска верига с период 2.

Нека $\eta_1, \eta_2, \ldots$ са независими случайни величини с еднакво разпределение

$$\mathrm{P}(\eta_n = 1) = 1 - \mathrm{P}(\eta_k = -1) = p.$$

Сумите им $\xi_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \eta_k$ тогава образуват случайно блуждаене.

Това ни позволява да пресметнем лесно очакването на процеса:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\xi_n) &= \mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\eta_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p)) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (2p-1) = \\ &= n(2p-1). \end{aligned}$$

Ако $p = \frac{1}{2}$, очакваме процеса да флуктира около началото. В противен случай, границата $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\xi_n)$ не съществува.

Ако възможните състояния са крайно множество $\{m, m+1, \ldots, M-1, M\}$ от цели числа, състоянията с m и M се наричат **бариери**. Разглеждаме два случая:

- Бариерите наричаме **поглъщащи**, ако

$$P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = m) = \begin{cases} 1, & j = m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = M) = \begin{cases} 1, & j = M \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

- Бариерите наричаме **отразяващи**, ако

$$P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = m) = \begin{cases} 1, & j = m + 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = M) = \begin{cases} 1, & j = M - 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Разбира се, възможно е едната бариера да бъда поглъщата, а другата - отразяваща. Случайните разходки са изключително приложими като прост модел, описващ

1. дали цената на една акция ще се покачи или ще падне за даден период от време.
2. едномерни проекции на хаотични движения на частици.
3. дифузията на изкуствено въведена популация животни.

1.6.2. Генериране на текст

Марковските вериги с краен брой състояния позволяват лесно да се генерира текст. Нека W е краен речник, т.е. множество от думи. Обикновено W се събира от истински текст.

Дефинираме марковска верига над W като задаваме матрица P от преходни вероятности, базирани на това колко често се срещат думите от W последователно. По-точно, дефинираме редица $w_0, w_1, \ldots$ от думи, всяка от които е случайна величина със стойности във W и условни вероятности $P(w_n = j \mid w_{n-1} = i)$, базирани на матрицата P. Траекториите на този процес са безкрайни изречения, базирани на оригиналния текст.

Ако разполагаме с метод за симулиране на дискретни случайни величини с краен брой стойности, можем да генерираме текст с произволна дължина.

Като прост пример можем да разгледаме изречението „Ту вали, ту не вали“. Преходните вероятности за него са

	ту	**вали**	**не**
ту	0	0.5	0.5
вали	1	0	0
не	0	1	0

Като примерен резултат от генериране на текст с марковска верига, обучена с горното изречение, можем да получим изречението „ту вали, ту не вали, ту вали, ту не вали, ту не вали“ (с вмъкнати запетайки за четимост).

2. Литература

Halidias, Nikolaos. „Ergodic Theorems for discrete Markov chains“. Англ. В: (юли 2017). arXiv: 1707.08827v2 [math.PR]. URL: http://arxiv.org/abs/1707.08827v2.

Божкова, Марусия. *Случайни процеси*. 2012. URL: https://sites.google.com/site/sluchproc/.

Боровков, Александр Александрович. *Теория вероятностей*. Рус. 3-е изд. Едиториал УРСС, 1999. ISBN: 5901006666.

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrnd0sX (дата на посещ. 24.03.2019).